­­­­­

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»**

**(ДВФУ)**

|  |
| --- |
| **ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)**  **Департамент математического и компьютерного моделирования** |

**О Т Ч Е Т**

о прохождении производственной практики

Технологической (проектно-технологической) практики

направление подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

профиль «Сквозные цифровые технологии»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Выполнили студенты  гр. Б9122-02.03.01сцт  Поповкин А. А.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
| Отчет защищен:  с оценкой «\_\_\_\_\_» |  | *(Ф.И.О.) (подпись)*  Жесткова В. О.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Севостьянов Д. С.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Плешанов Д. А.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Вегера Д. Е.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Руководитель практики  д.ф.-м.н., профессор  КовтанюкА.Е.\_**\_\_**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  «\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г. |
| Рег. № \_\_\_\_\_\_  «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г. |  | Практика пройдена в срок  с «20» марта 2024 г.  по «26» апреля 2024 г.  (2 недели) |

г. Владивосток

2024

Оглавление

[1. Введение 3](#_Toc167314272)

[2. Цель 3](#_Toc167314273)

[3. Основная часть 4](#_Toc167314274)

[4.1. Моделирование движения крови в микрососудах 4](#_Toc167314275)

[4.2. Изменение линейной плотности эритроцитов 6](#_Toc167314276)

[4.3. Изменение радиуса эритроцита при постоянном радиусе капилляра 7](#_Toc167314277)

[4–4. Изменение количества эритроцитов 9](#_Toc167314278)

[4–5. Влияние коэффициента деформации на вязкость крови 10](#_Toc167314279)

[4–6. Изменение скорости потока крови при увеличении коэффициента деформации 11](#_Toc167314280)

[4–7. Вывод 13](#_Toc167314281)

[4. Заключение 13](#_Toc167314282)

[5. Список литературы 13](#_Toc167314283)

# Введение

В последние десятилетия происходит быстрое развитие медицинских технологий. Стало больше препаратов, появились новые медицинские устройства и в целом произошёл прогресс в оказании медицинской помощи населению. Однако некоторые ситуации остаются до сих пор неизученными, и тут на помощь врачам приходят методы математического моделирования. Без риска для жизни человека они позволяют предсказать с высокой точностью, какое воздействие на организм оказывает даже небольшое изменение различных медицинских факторов. Поскольку ученые-медики не обладают необходимой квалификацией для построения и реализации математической модели, им необходимо сотрудничество со специалистами в области математических методов и компьютерных технологий.

Одним из самых важных процессов в человеческом организме является процесс переноса кислорода в кровеносной сети и тканях. Поэтому меня и моих сокурсников заинтересовала тема математического моделирования движения крови в сосудистой сети человека. Моделирование потока крови в сосудистой сети является важным для предсказания ситуаций, связанных с гипоксией, следствием которой может являться гибель клеток мозга, снижение когнитивных функций и физиологической активности и даже смерть человека.

Данная работа направлена на изучение движения крови в микрососудах. Будем описывать кровь как двухфазную жидкость, состоящую из плазмы и эритроцитов, при этом эритроциты моделируются как жидкость с высокой вязкостью (в 100 раз превышающую вязкость плазмы).

В процессе исследования было проделано моделирование движения крови в микрососудах, изучено влияние различных факторов на скорость потока крови и эффективную вязкость крови: радиуса эритроцита, линейной плотности эритроцитов и изменение коэффициента.

# Цель

Целью работы является моделирование движения крови в микрососуде с помощью метода конечных элементов в пакете FreeFEM++. Метод конечных элементов – это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными. Данный метод эффективен для решения самых разных задач механики, математической физики и техники.

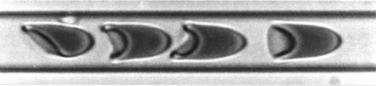
Также важной частью проекта стало изучение влияния коэффициента деформации эритроцитов на скорость потока крови. Кроме того, выявление закономерностей движения крови в отдельном микрососуде дает возможность для дальнейшего моделирования циркуляции крови в капиллярной сети мозга.

# Основная часть

## 3.1. Моделирование движения крови в микрососудах

Следуя [1], будем рассматривать движение крови в микрососудах с диаметром капилляра 4–8 мкм, длиной 50–150 мкм, положим объем эритроцита равным 88 Отметим, что при диаметре сосуда меньше 8 мкм движение крови можно представить как последовательность эритроцитов, движущихся друг за другом в потоке плазмы.

Ниже представлены рисунки человеческой крови в стеклянных трубках с диаметром 7 мкм (см. рисунки 1–2) при различных значениях гематокрита, который равен отношению объема эритроцитов к объему крови

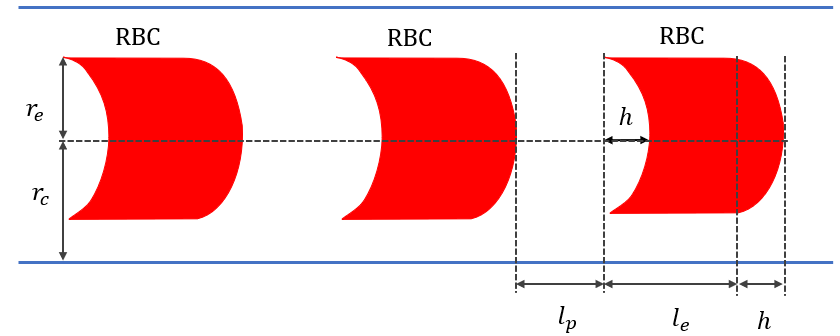


**Рис 1.** Движение крови в капилляре при гематокрите 0.2

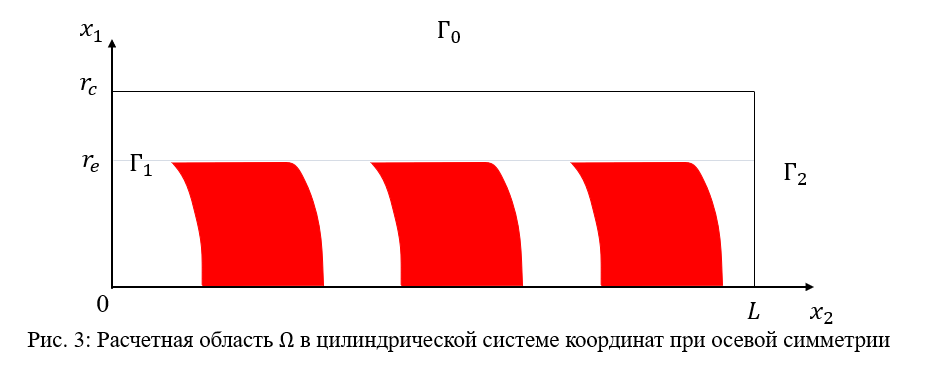


**Рис 2.** Движение крови в капилляре при гематокрите 0.4

Так как поток крови будет представлен как последовательность эритроцитов (RBC), движущихся друг за другом с потоком плазмы, движение крови в капилляре можно схематично изобразить как представлено на рисунке 3. Параметр описывает деформацию эритроцитов, при деформации объем эритроцита не изменяется. Дугу отклонения описываем параболой, которая однозначно определяется радиусом RBC и параметром Здесь – радиус сосуда, – радиус эритроцита, – длина сосуда.

**Рис. 3** Схематический рисунок эритроцитов, движущихся в капилляре.

С учетом осевой симметрии движение крови изучается в области Ω, в плоскости двух цилиндрических координат: радиальной и продольной (см. рисунок 4). Граничные условия задаются на следующих участках границы области: – стенка сосуда, – область втекания крови, – область вытекания крови.



**Рис. 4** Расчетная область в цилиндрической системе координат при осевой симметрии

Для нахождения поля скоростей будем использовать уравнение Стокса с переменной вязкостью:

(1)

| (2)

Здесь – вектор скоростей, *p* – давление, – переменная вязкость. Тензор скоростей деформации и оператор дивергенции в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В области эритроцита значение переменной вязкости равно 0.1 Па·с, в области плазмы 0.001 Па·с.

Для реализации данной задачи методом конечных элементов выведем слабую формулировку задачи. Домножим уравнения (1) на тестовые функции из пространства Соболева *H1*, проинтегрируем по области Ω, применим формулу интегрирования по частям. В результате приходим к следующей слабой формулировке задачи:

где , – тестовые функции.

## 3.2. Изменение линейной плотности эритроцитов

Будем изменять значения линейной плотности от 0.1 до 0.5, поскольку в микрососудах среднее значение линейной плотности составляет около 0.3. Значение линейной плотности высчитывается по формуле:

где – это длина эритроцита, а – это длина промежутка плазмы между двумя эритроцитами.

Возьмём коэффициент деформации () равный 0 и 0.5.

От коэффициента деформации зависит сама деформация, высчитываемая по следующей формуле: , где - длина эритроцита.

**Рис 5.** Скорость потока крови при изменении линейной плотности эритроцитов

Из приведенных графиков видно, что при увеличении линейной плотности, скорость потока крови уменьшается (см. рисунок 5).

## 3.3. Изменение радиуса эритроцита при постоянном радиусе капилляра

Необходимо провести эксперимент, как будет меняться скорость потока крови при меньшем/большем радиусе эритроцитов. Тем самым будет осуществлена проверка адекватности алгоритма вычисления скорости потока крови в зависимости от радиуса эритроцитов в модельной области.

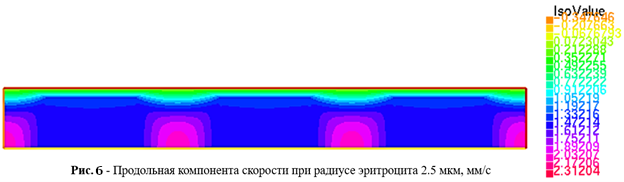
Остальные параметры оставим независимыми. Коэффициент деформации эритроцитов оставим равным нулю.

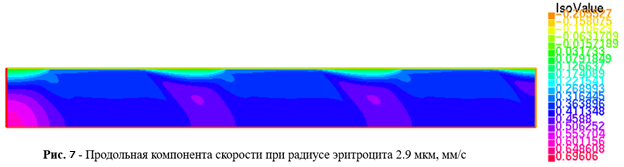
Расчеты модели происходили при фиксированном значении радиуса капилляра, радиус эритроцита находится по формуле:

где радиус эритроцита, а радиус капилляра.

Посмотрим, как будет изменяться скорость потока при увеличении радиуса эритроцита от 2.5 до 2.9.

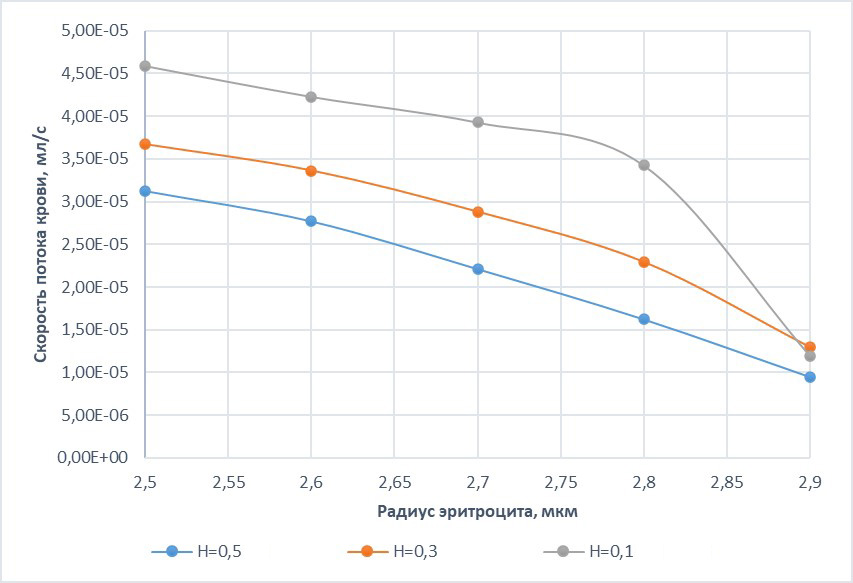
Продольная компонента скорости крови выглядит следующим образом:





Рассмотрим зависимость радиуса эритроцита и скорости потока крови при трех заданных значениях линейной плотности крови (*H*).

Зависимость скорости потока при изменении радиуса при различных значениях линейной плотности эритроцитов представлена на графике.



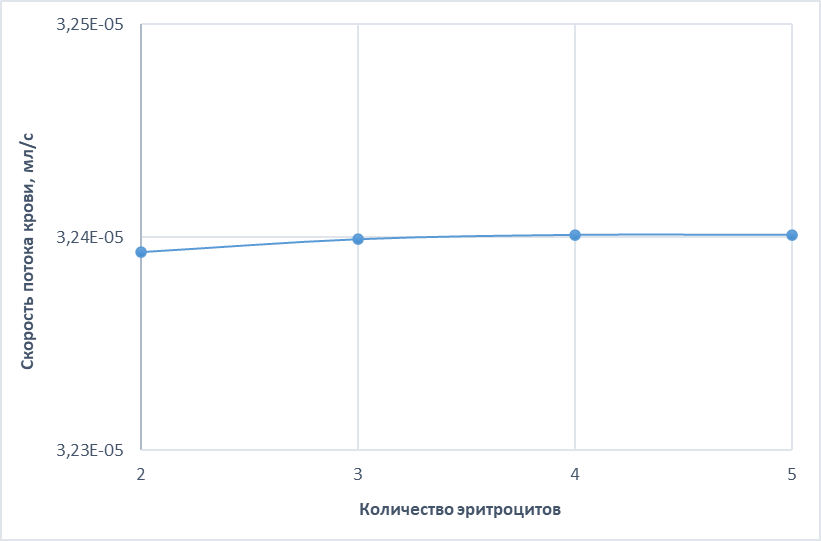
**Рис.** **8** График зависимости скорости потока при изменении радиуса эритроцита

По результатам вычислительного эксперимента видно, что при увеличении радиуса эритроцитов скорость потока постепенно уменьшается, из чего можно сделать вывод, что алгоритм адекватен и действительно отображает процесс изменения скорости потока, происходящий в настоящих микрососудах.

## 3.4. Изменение количества эритроцитов

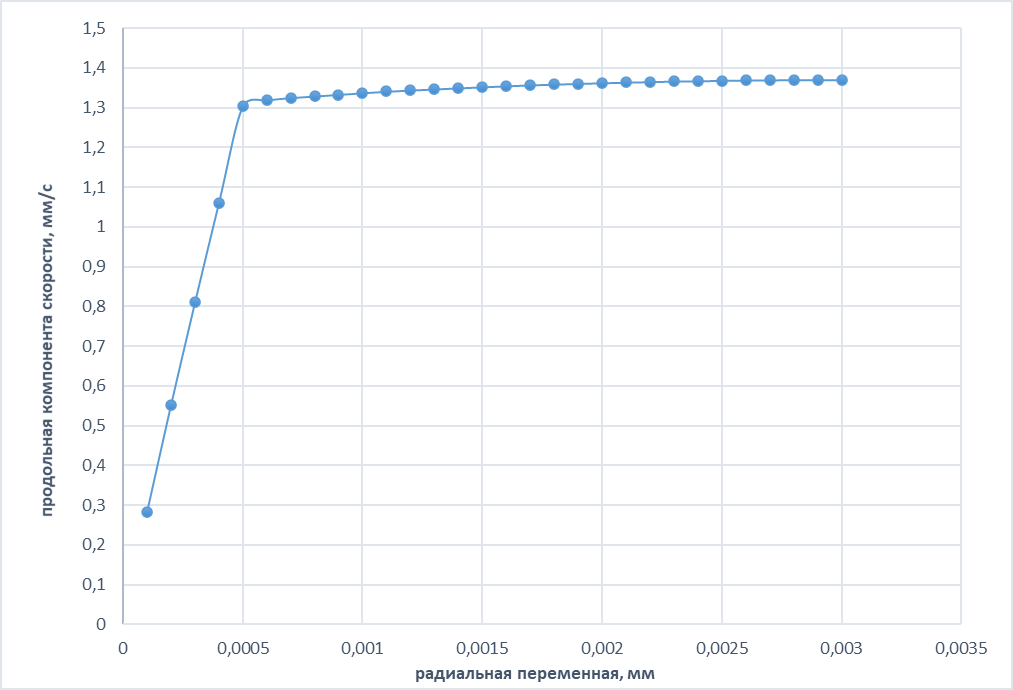
Поскольку изначально моделирование потока крови в микрососуде происходило с фиксированным количеством эритроцитов (3), необходимо провести эксперимент, как будет меняться скорость потока крови при изменении количества эритроцитов. Тем самым будет осуществлена проверка устойчивости алгоритма вычисления скорости потока крови в зависимости от количества эритроцитов в модельной области.

Возьмём линейную плотность равной 0,5. Коэффициент деформации эритроцитов оставим равным нулю.



**Рис. 9** График скорости потока при изменении количества эритроцитов

Профиль (распределение скоростей в потоке) продольной скорости, соответствующий линейной плотности эритроцитов, равной представлен на рисунке 10.



**Рис. 10** Продольная компонента скорости

По результатам вычислительного эксперимента видно, что несмотря на изменение количества эритроцитов скорость потока крови практически не изменяется, что свидетельствует об устойчивости вычислительного алгоритма.

В дальнейшем будем брать количество эритроцитов = 3

## 3.5. Влияние коэффициента деформации на вязкость крови

По условию задачи мы работаем с уравнением Стокса с переменной вязкостью. Сама вязкость, которая напрямую влияет на поток, вычисляется следующим образом:

где *Q* – величина потока.

Необходимо рассмотреть, как влияет коэффициент деформации на важную компоненту, напрямую влияющую на скорость потока. Также нужно рассмотреть, как изменяется вязкость при разном гематокрите (линейной плотности эритроцитов).

**Рис. 11** График относительной вязкости при увеличении коэффициента деформации

Как видим, при увеличении гематокрита, повышается эффективная вязкость, что обратно пропорционально скорости потоку. Это доказывает устойчивость и корректность вычислительного алгоритма.

## 3.6. Изменение скорости потока крови при увеличении коэффициента деформации

В рамках поставленной задачи, необходимо установить, насколько сильный эффект коэффициент деформации оказывает на скорость потока.

В данном вычислительном эксперименте будем брать 3 разных уровня гематокрита, 0.5, 0.3 и 0.1

**Рис. 12** Скорость потока

Необходимо определить, насколько сильно в процентном соотношении значение потока изменяется при увеличении коэффициента деформации. Для этого воспользуемся относительной погрешностью, где в качестве точного значения будем сравнивать значения графика со значением при коэффициенте деформации равном 0.

**Рис. 13** Относительная погрешность

Из результатов вычислительных экспериментов видно, что деформация эритроцитов незначительно влияет на скорость потока и даёт ошибку, находящуюся в пределах погрешности измерений (3%). Это дает основание использовать цилиндрическую форму эритроцитов при описании модельной области.

## 3.7. Выводы

В результате проведённых экспериментов, было установлено, что коэффициент деформации незначительно влияет на эффективную вязкость и скорость потока крови, поэтому можно пренебречь этим коэффициентом и приравнять его к 0.

Данный результат позволит применять аналитические подходы к моделированию движения крови по капиллярной сети, что значительно увеличит скорость вычислений.

# Заключение

На основе уравнений Стокса движения жидкости с переменной вязкостью разработан алгоритм нахождения поля скоростей при движении крови в микрососуде.

Осуществлена программная реализация алгоритма в пакете FreeFEM++.

# Список литературы

1. Kovtanyuk A. Modeling of the cerebral blood circulation in a capillary network accounting for the influence of the endothelial surface layer / A. Kovtanyuk, V. Turova, I. Sidorenko, A. Chebotarev, R. Lampea // Computer Methods and Programs in Biomedicine. – 2022. – V. 224. – 107008.